

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

13.01.2010

**BAREM DE CORECTARE**

CLASA a IX –a

Problema 1.

Dacă  $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ , sunt rădăcinile ecuației, cu relațiile lui Viete avem  $x_1 + x_2 = -a$ ;  $x_1 x_2 = b + n \dots 1p$

Rezultă că și  $a, b \in \mathbb{Z} \dots 1p$

Deci  $na^2 + b^2 \in \mathbb{N} \dots 1p$

În plus  $na^2 + b^2 = n(x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - n)^2 = nx_1^2 + x_1^2 x_2^2 + nx_2^2 + n^2 = (x_1^2 + n)(x_2^2 + n) \dots 2p$

Fiecare factor este număr natural mai mare ca 1  $\dots 1p$

Rezultă că  $na^2 + b^2$  este număr compus  $\dots 1p$

Problema 2.

$$\frac{zy}{\sqrt{(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{z^2}{x^2 + z^2}} \dots 1p$$

$$\text{Aplicând inegalitatea mediilor avem: } \sqrt{\frac{y^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{z^2}{x^2 + z^2}} \leq \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{x^2 + y^2} + \frac{z^2}{x^2 + z^2} \right) \dots 2p$$

Scrierea celorlalte două inegalități echivalente  $\dots 1p$

Adunarea corectă, membru cu membru a celor trei inegalități  $\dots 1p$

Finalizare  $\dots 2p$

Problema 3.

a)

$$x = \frac{3k(2k+5) - 15k + 2}{2k+5} = 3k - \frac{15k-2}{2k+5} \dots 1p$$

$$\text{Atunci } 2x = 6k - 15 + \frac{79}{2k+5} \dots 1p$$

$$2x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k+5 \in D_{79}. \text{ Cum } 79 \text{ este număr prim} \Rightarrow D_{79} = \{-79, -1, 1, 79\} \dots 1p$$

$$\text{Aflarea mulțimii } A = \{-134, -56, 26, 104\} \dots 2p$$

$$\text{b) } \text{card } P(A) = 2^4 = 16 \dots 0,5p$$

$$\text{Notăm } \text{card } B = n \Rightarrow \text{card } P(B) = 2^n \dots 0,5p$$

$$\text{Avem } 2^n + 16 = 32; n = 4 \dots 1p$$

BAREM  
Clasa a – IX –a

Problema 4.

Soluția 1

Fie  $G_1$  centrul de greutate al triunghiului ACE și  $G_2$  centrul de greutate al triunghiului BDF.

Avem :  $3\overrightarrow{XG_1} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} + \overrightarrow{XE}$  .....1p

$3\overrightarrow{XG_2} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{XF}$  .....1p

Dar  $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{XB}$  .....1p

și  $\overrightarrow{XF} + \overrightarrow{XD} = \overrightarrow{XE}$  ..... 1p

Atunci  $3\overrightarrow{XG_1} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XE}$  .....1p

$3\overrightarrow{XG_2} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{XE}$  .....1p

Deci  $\overrightarrow{XG_1} = \overrightarrow{XG_2} \Rightarrow G_1 = G_2$  .....1p

Soluția 2

$3\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1F} = \overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{EF}$  .....2p

Dar ,  $\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1E} = \vec{0}$  ..... 1p

Deci ,  $3\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CX} + \overrightarrow{XD} + \overrightarrow{EF}$  .....1p

Dar ,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CX} = \vec{0}$  și  $\overrightarrow{XD} + \overrightarrow{EF} = \vec{0}$  .....1p

Atunci  $3\overrightarrow{G_1G_2} = \vec{0} \Rightarrow G_1 = G_2$  .....2p

**www.mategl.com**

INSPECTORATUL ȘCOLAR AL JUDEȚULUI OLT

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

13.01.2010

**BAREM DE CORECTARE**

CLASA a - X –a

Problema 1.

$$\left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 2\sqrt{7} \text{ . Notăm } \frac{x}{2} = t \text{ .....2p}$$

$$\text{Fie funcția } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \left(\sqrt{7} + \sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{7} - \sqrt{2}\right)^x \text{ .....1p}$$

Funcția este strict crescătoare pe  $(0,1)$  și  $(1,\infty)$ , rezultă  $t=1$  soluția ecuației  $f(t) = 1$  .....3p

$$\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ singura soluție pozitivă .....1p}$$

Problema 2.

$$\text{Avem } x = \log_5 6 + \log_6 5 = \log_5 6 + \frac{1}{\log_5 6}$$

$$y = \log_6 7 + \log_7 6 = \log_6 7 + \frac{1}{\log_6 7} \text{ ..... 1p}$$

În continuare vom considera funcția  $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(t) = t + \frac{1}{t}$  . Se arată că funcția  $f$  este strict crescătoare .....3p

Demonstrăm că  $\log_5 6 > \log_6 7$  . Avem succesiv Ș

$$\log_5 6 > \log_6 7 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_6 5} > \log_6 7 \Leftrightarrow 1 > \log_6 5 \cdot \log_6 7 \text{ .....1p}$$

$$\text{Dar } \log_6 5 \cdot \log_6 7 < \frac{(\log_6 5 + \log_6 7)^2}{4} = \frac{\log_6^2 35}{4} < \frac{\log_6^2 36}{4} = 1 \text{ .....2p}$$

**www.mategl.com**

Problema 3.

$$\text{Fie } z = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha) \text{ . Atunci } \frac{z}{|z|} = \cos \alpha + i \sin \alpha \text{ .....1p}$$

$$\text{iar } \frac{\overline{z}}{z} = \frac{1}{\cos \alpha + i \sin \alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha \text{ .....2p}$$

BAREM  
Clasa a-X-a

Deci  $\frac{z}{|z|} + \frac{|z|}{z} = 2 \cos \alpha \in \mathbb{R} \dots\dots\dots 1p$

De aici rezultă ecuația de gradul al II – lea în  $z$  :

$$z^2 - 2z|z| \cos \alpha + |z|^2 = 0 \dots\dots\dots 2p$$

Deci  $a = 2|z| \cos \alpha$  și  $b = -|z|^2 \dots\dots\dots 1p$

Problema 4.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2 \sin kx \cdot \sin (k+1)x} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin x}{\sin kx \cdot \sin (k+1)x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sin (k+1)x \cdot \cos kx - \sin kx \cdot \cos (k+1)x}{\sin kx \cdot \sin (k+1)x} \cdot \frac{1}{\sin x} = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} \sum_{k=1}^n [\operatorname{ctgx} - \operatorname{ctg} (k+1)x] = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} [\operatorname{ctgx} - \operatorname{ctg} (n+1)x] = \dots\dots\dots 1p$$

$$= \frac{1}{2 \sin x} \left( \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos (n+1)x}{\sin (n+1)x} \right) = \frac{1}{2 \sin x} \cdot \frac{\cos x \cdot \sin (n+1)x - \cos (n+1)x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin (n+1)x} = \dots\dots 1p$$

$$= \frac{\sin nx}{2 \sin^2 x \cdot \sin (n+1)x} \dots\dots\dots 1p$$

**www.mategl.com**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

13.01.2010

**BAREM DE CORECTARE**

CLASA a - XI -a

Problema 1.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3; A^4 = -A; A^5 = -A^2; A^6 = I_3$$

$$M = \{A; A^2; A^3; -A; -A^2; I_3\} \quad \text{și } m = \text{card}(M) = 6 \dots\dots\dots 2p$$

$$A + A^2 + \dots + A^6 = A + A^2 - I_3 - A - A^2 + I_3 = 0_3; \sum_{i=1}^{mn} A_i = \sum_{i=1}^{6n} A_i = (A + A^2 + \dots + A^6) + A^6(A + A^2 + \dots + A^6) + \dots + A^{6n-6}(A + A^2 + \dots + A^6) = 0_3 \dots\dots\dots 2p$$

$\det A \neq 0$ , deci există  $A^{-1}$ ;  $A^6 = A^5 \cdot A = A \cdot A^5$  și cum  $I_3 = A^5 A$ , avem

$$A^{-1} = A^5 = -A^2 \dots\dots\dots 1p$$

$$A^{2010} = (A^6)^{335} = I_3. \text{ Ecuația din enunț devine } X(0_3 + A^2) = I_3 \Leftrightarrow XA^2 = I_3 \Rightarrow X = -A \dots\dots\dots 2p$$

Problema 2.

$$\text{Egalitatea din enunț este echivalentă cu } (A^3 + I_n)(B - I_n) = -I_n \Leftrightarrow (A + I_n)(A^2 - A + I_n)(B - I_n) = -I_n \quad (1) \\ \Rightarrow A + I_n \text{ inversabilă, deci există } (A + I_n)^{-1} \dots\dots\dots 2p$$

Înmulțim relația (1) la stânga cu  $(A + I_n)^{-1}$  și relația obținută la dreapta cu  $A + I_n$  și obținem

$$(A^2 - A + I_n)(B - I_n)(A + I_n) = -I_n \quad (2) \dots\dots\dots 3p$$

Din relațiile (1) și (2) obținem prin scădere  $(A^2 - A + I_n)(BA - AB) = 0_n \Rightarrow BA = AB$ ,

deoarece  $(A^2 - A + I_n)$  este inversabilă din (1)  $\dots\dots\dots 2p$

**www.mategl.com**

Problema 3.

Calculul lui  $x_n$  în funcție de  $n$  (se obține  $x_n = \frac{1}{4^{a_n}}$ ) și observarea faptului că  $a_n$  verifică

$$\text{Recurența de ordinul I, } a_{n+1} = 3a_n - 1, a_1 = 1 \dots\dots\dots 1,5p$$

$$\text{Determinarea lui } a_n = \frac{3^{n-1} + 1}{2}, n \geq 1 \text{ și } x_n = \frac{1}{4^{a_n}} = \frac{1}{2^{3^{n-1} + 1}}, n \geq 1 \dots\dots\dots 1,5p$$

$$\text{Aflarea lui } y_n = \frac{\frac{1}{2^{3^n}} - 1}{\frac{1}{2^{3^{n-1}}} - 1} \dots\dots\dots 2p$$

BAREM  
Clasa a XI-a

Calculul produsului  $y_1 y_2 \dots y_n = -2 \left( \frac{1}{2^{3n}} - 1 \right)$  și calculul  $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_1 y_2 \dots y_n) = 2$  ..... 2p

Problema 4.

Identificarea nedeterminării  $\infty - \infty$  și scrierea  $L = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^8}} - \sqrt[9]{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^9}} \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt[8]{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^8}} - 1 - \sqrt[9]{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^9}} + 1 \right) \dots\dots\dots 1,5p$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[ \left( 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^8} \right)^{\frac{1}{8}} - 1 \right]}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^8}} - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left[ \left( 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^9} \right)^{\frac{1}{9}} - 1 \right]}{-\frac{1}{x} + \frac{1}{x^9}} \left( -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^9} \right) \dots\dots\dots 1,5p$$

Aplicarea limitei fundamentale  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{(1+u)^r - 1}{u} = r$  .....2p

Finalizare  $L = \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{17}{72}$  .....2p

**www.mategl.com**

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Etapa locală

13.01.2010

**BAREM DE CORECTARE**

CLASA a - XII -a

Problema 1.

Fie  $e$  elementul neutru al grupului. Pentru  $f \in A$ , luăm  $y = e$  și obținem  $f(x) = x \circ f(e) = x \circ \alpha$ , unde  $\alpha = f(f(e)) \in G$  .....1,5p  
 Dacă  $f(x) = f(y) \Rightarrow x \circ \alpha = y \circ \alpha \Rightarrow x = y$ , deci  $f$  este injectivă .....1,5p  
 Fie  $x \in G$ , avem :  $f(x) = f(e \circ x) = e \circ f(x) = f(f(x))$  .....1p  
 Din  $f(x) = f(f(x))$  și  $f$  injectivă  $\Rightarrow f(x) = x$ ,  $(\forall) x \in G$  .....1p  
 Deci  $f = 1_G$ ; dar  $1_G(x \circ y) = x \circ y = x \circ 1_G(1_G(y)) \Rightarrow 1_G \in A$ . rezultă  $|A| = 1$  .....2p

Problema 2.

$1^\circ \Rightarrow 2^\circ$

Fie  $x \in G \Rightarrow H = \{x, x^2, x^3, \dots, x^k, \dots\}$  este parte stabilă  $\stackrel{(1)}{\Rightarrow} H$  subgrup  $\Rightarrow e \in H$  ..... 1,5p  
 Prin urmare  $(\exists) n \in \mathbb{N}^*$  cu  $x^n = e \Rightarrow x$  are ordin finit ..... 1,5p

$2^\circ \Rightarrow 1^\circ$

Fie  $H \subseteq G$  o parte stabilă. Dacă arătăm că  $(\forall) x \in H \Rightarrow x^{-1} \in H$ , atunci  $H$  este subgrup ..... 1p  
 Fie  $x \in H$  și  $n$  ordinul lui  $x \Rightarrow x^n = e \Rightarrow x^{n-1}x = xx^{n-1} = e \Rightarrow x^{-1} = x^{n-1}$  ..... 1p  
 Dar  $x^{n-1} \in H$ , căci  $H$  este parte stabilă .....1p  
 Deci  $x^{-1} \in H$  și astfel  $H$  este subgrup al lui  $G$ . .....1p

Problema 3.

Se face substituția  $\sqrt{x} = \sqrt{a} \cdot u$ ;  $x=1 \Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{a}}$ ;  $x=a^2 \Rightarrow u = \sqrt{a}$ ;  $\frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{a} du$  .....1p

Se ajunge la :

$$\int_1^{a^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+a)} dx = \frac{2\sqrt{a}}{a} \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{\ln a}{u^2+1} du + \frac{4\sqrt{a}}{a} \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{\ln u}{u^2+1} du = \frac{2\sqrt{a}}{a} \ln a \cdot \arctg u \Big|_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} + \frac{4\sqrt{a}}{a} \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{\ln u}{u^2+1} du$$

.....2p

Se arată făcând substituția  $u = \frac{1}{t}$ , că  $\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\sqrt{a}} \frac{\ln u}{1+u^2} du = 0$  .....3p

Deci  $\int_1^{a^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(x+a)} dx = \frac{2\sqrt{a}}{a} \ln a \cdot \left( \arctg \sqrt{a} - \arctg \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$  .....1p

BAREM  
Clasa a XII-a

Problema 4.

Notăm  $g(\arctg x) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg x} \ln(1+tg^2 t) dt \Rightarrow f(x) = g(\arctg x) \dots\dots\dots 0,5p$

$$f'(x) = [g(\arctg x)]' = g'(\arctg x) \cdot (\arctg x)' = \frac{g'(\arctg x)}{1+x^2} = \frac{\ln[1+tg^2(\arctg x)]}{1+x^2} = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$$

.....1,5p

Avem

$$(xf(x))' = f(x) + xf'(x) \Rightarrow f(x) = (xf(x))' - xf'(x) \Rightarrow f(x) = (xf(x))' - \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2}$$

.....1p

$$\int_0^1 f(x) dx = xf(x)|_0^1 - \int_0^1 \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx = f(1) - \frac{1}{4} \ln^2 2 \dots\dots\dots 2p$$

Dar  $f(1) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctg 1} \ln(1+tg^2 t) dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+tg^2 t) dt = 0$ . Deci  $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{1}{4} \ln^2 2 \dots\dots\dots 2p$

**www.mategl.com**